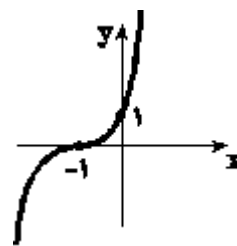


① نمودار تابع $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ به صورت مقابل می باشد، $a + b$ کدام است؟



۶ (۲)

۴ (۴)

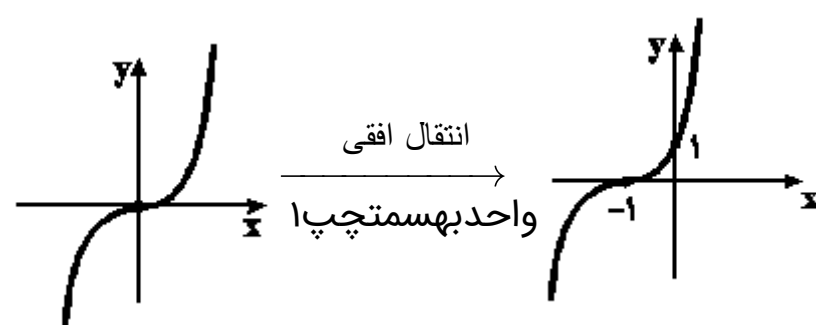
۱) صفر

۲ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

نمودار مورد نظر، مربوط به تابع $y = (x + 1)^3$ می باشد.



$$y = (x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow a + b = 6$$

② نمودارهای دو تابع $f(x) = 3x - 3x^2 + x^3$ و f^{-1} ، در چند نقطه متقاطع اند؟

۴) صفر

۳) ۳

۲) ۲

۱) ۱

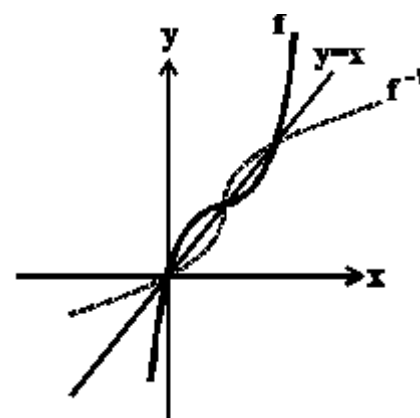
پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

ضابطه f را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$f(x) = 3x - 3x^2 + x^3 = (x - 1)^3 + 1$$

مطابق شکل نمودار تابع f و وارون آن در سه نقطه متقاطع هستند.



۳) وارون تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ با دو انتقال برتابع $g(x) = -2 + \sqrt[3]{x+1}$ منطبق می‌شود. این دو انتقال کدام است؟

- (۱) سه واحد به چپ و سه واحد به بالا
(۲) سه واحد به راست و سه واحد به بالا
(۳) سه واحد به راست و سه واحد به پایین
(۴) سه واحد به چپ و سه واحد به پایین

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$f(x) = \underbrace{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}_{(x-1)^3} + 2 = (x-1)^3 + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2} + 1$$

اگر تابع $f^{-1}(x)$ را ۳ واحد به چپ و پس ۳ واحد به پائین منتقل کنیم، منطبق بر تابع $g(x)$ خواهد شد.

$$f^{-1}(x) + 3 = 1 + \sqrt[3]{x-2} \xrightarrow[\text{به چپ}]{\text{سه واحد}} y = 1 + \sqrt[3]{(x+3)-2}$$

$$= 1 + \sqrt[3]{x+1} \xrightarrow[\text{به پایین}]{\text{سه واحد}} y = (1 + \sqrt[3]{x+1}) - 3$$

$$\Rightarrow g(x) = -2 + \sqrt[3]{x+1}$$

۴) در بازه $[a, b]$ ، نمودار تابع $f(x) = |x| + |x-2|$ اکیداً یکنواخت و زیر خط $y = 4 - x$ قرار می‌گیرد. حاصل $b - a$ کدام است؟

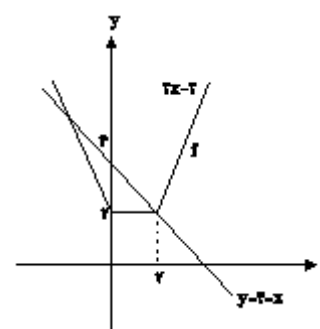
- (۱) $\frac{3}{2}$
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

نمودار تابع f و خط داده شده را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 2x; & x < 0 \\ 2; & 0 \leq x < 2 \\ 2x - 2; & x \geq 2 \end{cases}$$



نمودار تابع f در بازه $[-\infty, 0]$ اکیداً یکنواست که قسمتی از آن زیر خط قرار می‌گیرد، پس $b = 0$ است.

مقدار a نیز طول نقطه تلاقی ضابطه $y = 2 - 2x$ از f با خط $y = 4 - x$ است:

$$\Rightarrow 2 - 2a = 4 - a \Rightarrow a = -2$$

$$\Rightarrow b - a = 2$$

۵) تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (x - 2)|x|$ در کدام نقطه به طول زیر، از صعودی به نزولی تغییر جهت می‌دهد؟

(۴) وجود ندارد.

(۳) -۱

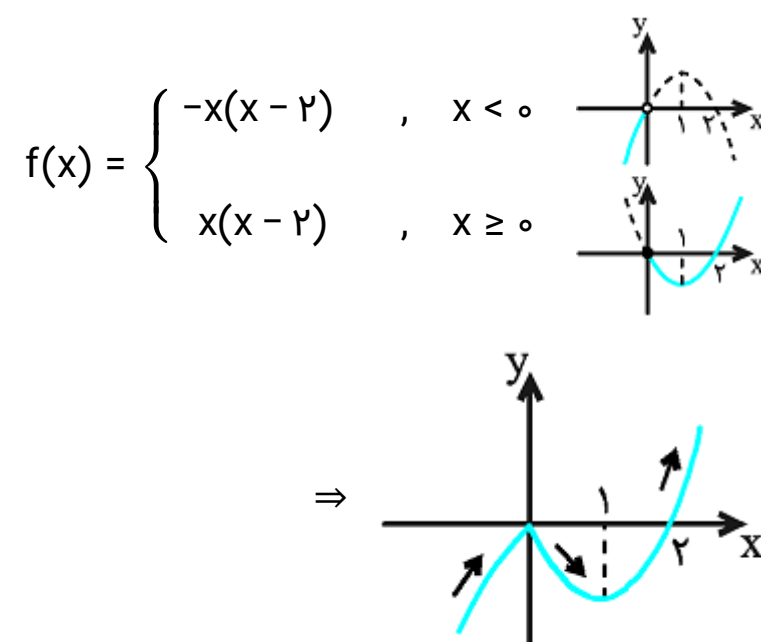
(۲) صفر

(۱) ۱

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

نمودار تابع را رسم می‌کنیم، برای این منظور تابع را به یک تابع چندضابطه‌ای با تعیین علامت قدرمطلق تبدیل می‌کنیم.



با توجه به نمودار دیده می‌شود که در $x = 0$ تابع از صعودی به نزولی تغییر علامت می‌دهد.

۶) تابع $f(x) = x|x| - x$ روی بازه $[a, b]$ اکیداً نزولی است. بیشترین مقدار $f(a) - f(b)$ کدام است؟

(۲) ۱

(۱) $\frac{1}{2}$

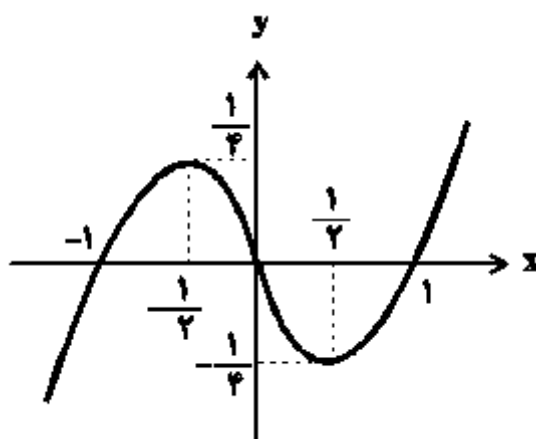
(۴) ۲

(۳) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا نمودار تابع $f(x) = x|x| - x$ را رسم می‌کنیم.

$$f(x) = x|x| - x = \begin{cases} x^2 - x; x > 0 \\ -x - x^2; x \leq 0 \end{cases}$$



ملاحظه می‌کنید که بازه $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ بزرگترین بازه‌ای است که تابع f بر روی آن اکیداً نزولی است، پس بیشترین مقدار $f(a) - f(b)$ برابر است با:

$$f(-\frac{1}{2}) - f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - (-\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$$

۷) اگر بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x) = |x - a| - |x - b|$ در آن اکیداً نزولی است، به صورت $[-۳, ۵]$ باشد، دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟

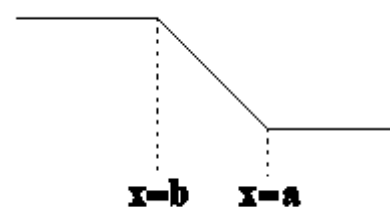
(۴) $(-۳, ۵)$ (۳) $(-۵, ۳)$ (۲) $(۵, -۳)$ (۱) $(۳, -۵)$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

چون تابع به صورت آبشاری یا سرسره‌ای است و قرار است نزولی باشد، پس باید $a > b$ باشد، این توابع بین ریشه‌های عبارت داخل قدرمطلق اکیداً یکنوا هستند پس ۵ و -۳ همان ریشه‌ها هستند:

$$\left. \begin{array}{l} a = ۵ \\ b = -۳ \end{array} \right\} \Rightarrow (a, b) = (۵, -۳)$$



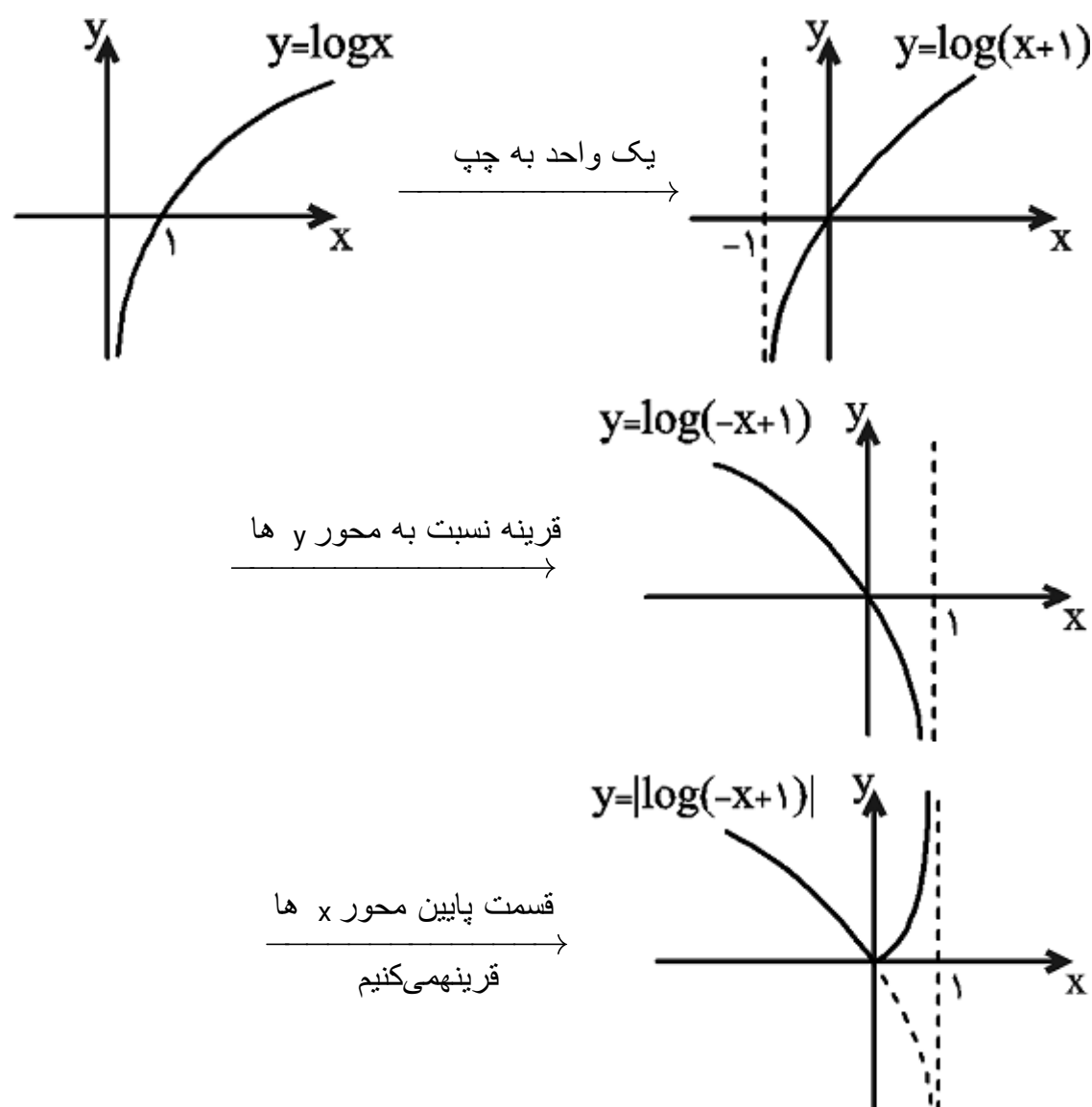
۸) بزرگترین بازه‌ای که تابع با ضابطه‌ی $y = |\log(-x+1)|$ در آن اکیداً نزولی است، کدام است؟

- (۱) $[0, +\infty)$ (۲) $(-\infty, 0]$ (۳) $[0, 1)$ (۴) $(-\infty, 1]$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

نمودار تابع $y = |\log(-x+1)|$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، تابع در بازه‌ی $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی است.

۹) تابع f در اعداد حقیقی اکیداً نزولی و $f(2) = 0$ است. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{x^2}{(x-1)f(x)}}$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟

(۴) بی‌شمار

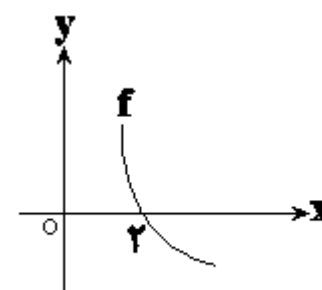
(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»



می‌دانیم $f(2) = 0$ بوده و تابع f اکیداً نزولی است.

$$\frac{x^2}{(x-1)f(x)} \geq 0$$

x	0	1	2
x^2	+	0	+
$x-1$	-	0	+
$f(x)$	+	+	0
جارت	-	0	+

دامنه تعریف تابع $D_g = (1, 2) \cup \{0\}$ است و شامل یک عدد صحیح نامنفی است.

۱۰) اگر نمودار تابع $y = \sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y = x$ قرینه کرده، سپس ۳ واحد درجهت مثبت محور y ها انتقال دهیم و با ضریب ۲ در راستای افقی انبساط دهیم، نمودار حاصل با کدام طول خط $y = ۸$ را قطع می‌کند؟

(۱) ۲

(۲) -۴

(۳) ۴

(۴) -۲

پاسخ:

گزینه ۳

گزینه «۳»

قرینه نسبت به $y = x$ یعنی همان وارون کردن:

$$y = \sqrt{x-1}; y \geq 0 \Rightarrow y^2 = x-1 \Rightarrow y^2 + 1 = x$$

جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$\Rightarrow y = x^2 + 1 \xrightarrow{\text{واحد به بالا}} y = x^2 + 4; x \geq 0$$

$$\xrightarrow{\text{انبساط افقی}} y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 4$$

$$y = ۸ \Rightarrow \frac{x^2}{۴} + 4 = ۸ \Rightarrow x^2 = ۱۶$$

$$\Rightarrow x = \pm ۴ \xrightarrow{x \geq 0} x = ۴$$

۱۱) اگر نمودار تابع $f(x) = -1 + \sqrt{x+1}$ در بازه (a, b) بالاتر از نمودار تابع $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ باشد، بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

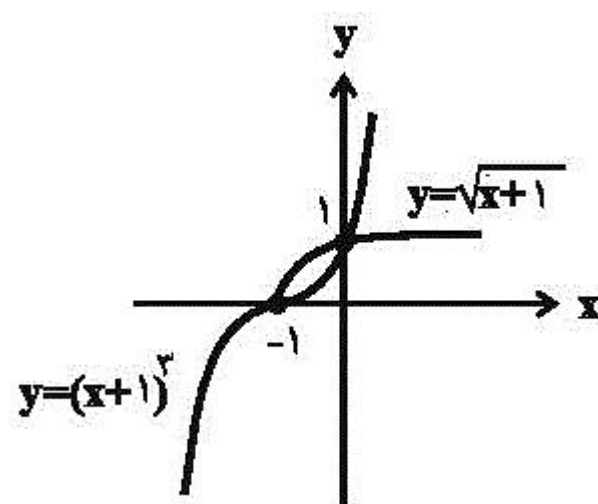
نمودار تابع f بالاتر از g است، بنابراین داریم:

$$f(x) > g(x) \Rightarrow -1 + \sqrt{x+1} > x^3 + 3x^2 + 3x$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} > x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} > (x+1)^3$$

با رسم نمودارهای دو تابع $y = \sqrt{x+1}$ و $y = (x+1)^3$ در یک دستگاه، می‌توانیم جواب نامعادله بالا را بیابیم:



با توجه به نمودارها، بازه موردنظر $(-1, 0)$ می‌باشد.

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow b - a = 1$$

۱۲) اگر f تابعی اکیداً نزولی با دامنه R باشد، دامنه تعریف $y = \sqrt{f(|x-2|) - f(|2x-1|)}$ کدام است؟

[-۱, ۱] (۴)

(-۱, ۱) (۳)

 $R - (-1, 1)$ (۲) $R - [-1, 1]$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

y یک تابع رادیکالی با فرجه زوج است، پس باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد:

$$f(|x-2|) - f(|2x-1|) \geq 0 \Rightarrow f(|x-2|) \geq f(|2x-1|)$$

تابعی نزولی اکید است

$$\xrightarrow{\text{تابعی نزولی اکید است}} |x-2| \leq |2x-1|$$

توان ۲

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 - 4x + 4 \leq 4x^2 - 4x + 1 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1$$

$$\Rightarrow x \in R - (-1, 1)$$

(۱۳)

اگر بزرگ‌ترین بازه‌ای را که تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & -1 < x \leq 2 \\ -3 & -4 \leq x \leq -1 \\ \sqrt{-x} & -9 \leq x < -4 \end{cases}$ در آن صعودی باشد به صورت $[a, b]$ نشان

دهیم، $b - a$ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۴

(۳) ۶

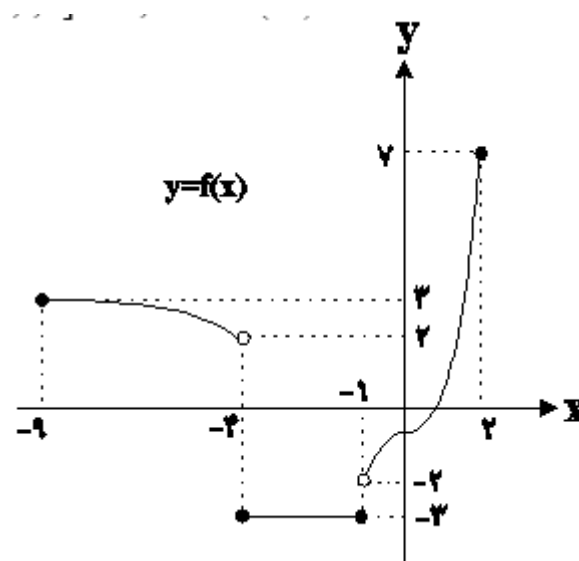
(۴) ۱۱

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

ابتدا تابع سه ضابطه‌ای $f(x)$ را رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار رسم شده، بزرگ‌ترین بازه‌ای که این تابع در آن صعودی است، بازه $[-4, 2]$ است، بنابراین:

$$[a, b] = [-4, 2] \rightarrow b - a = 2 - (-4) = 6$$



۱۴) به ازای چه مقادیری از m و n ، تابع $f(x) = \begin{cases} |x-1|-n & , x < 0 \\ mx^2-2 & , x \geq 0 \end{cases}$ یک تابع اکیداً نزولی است؟

(۱) $n \geq 2, m < 0$

(۲) $n \leq 2, m > 0$

(۳) $n \leq 3, m < 0$

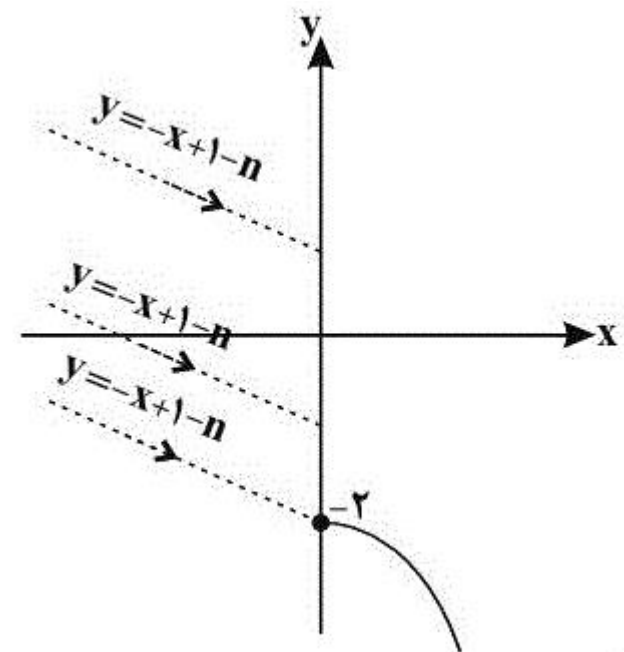
(۴) $n \geq 3, m > 0$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

با رسم تقریبی تابع f می‌توانیم به‌خوبی آنرا بررسی کنیم. بنابراین:

$$f(x) = \begin{cases} -x+1-n & , x < 0 \\ mx^2-2 & , x \geq 0 \end{cases}$$



برای اینکه f اکیداً نزولی باشد، باید $m < 0$ باشد و حداکثر مقدار n برابر خواهد بود با:

$$1-2 \geq -2 \Rightarrow -2 \geq -3 \Rightarrow n \leq 3$$

۱۵) تابع $f = \{(-1, 4m+1), (1, m^2+1), (0, 5)\}$ ، یک تابع صعودی است. مجموعه همه مقادیر ممکن برای m کدام است؟

(۴) $1 < m < 2$

(۳) $-2 < m < 2$

(۲) $m \leq -2$

(۱) $-2 \leq m < 0$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$-1 < 0 < 1 \xrightarrow{f \text{ صعودی}} f(-1) \leq f(0) \leq f(1) \Rightarrow 4m+1 \leq 5 \leq m^2+1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2+1 \geq 5 \Rightarrow m^2 \geq 4 \Rightarrow m \geq 2 \text{ یا } m \leq -2 \\ 4m+1 \leq 5 \Rightarrow 4m \leq 4 \Rightarrow m \leq 1 \end{cases}$$

اشتراک

$$\longrightarrow m \leq -2$$

۱۶) قرینه منحنی به معادله $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ نسبت به خط $y = x$ را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم، ضابطه منحنی حاصل کدام است؟

(۱) $g(x) = x^2 + 2x$

(۲) $g(x) = x^2 - 1$

(۳) $g(x) = x^2 - 2x$

(۴) $g(x) = x^2 + 1$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

قرینه یک منحنی مانند f نسبت به خط $y = x$ همان وارون تابع f است. لذا باید وارون تابع f را به دست آوریم و سپس آن را یک واحد به راست انتقال دهیم.

$$y = \sqrt{x+1} - 1 \Rightarrow y+1 = \sqrt{x+1}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (y+1)^2 = (\sqrt{x+1})^2$$

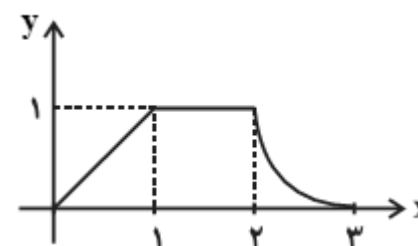
$$\Rightarrow y^2 + 2y + 1 = x + 1 \Rightarrow x = y^2 + 2y \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 + 2x$$

حال باید $f^{-1}(x)$ را یک واحد به راست انتقال دهیم. بنابراین:

$$g(x) = f^{-1}(x-1) = (x-1)^2 + 2(x-1)$$

$$= x^2 - 2x + 1 + 2x - 2 = x^2 - 1 \Rightarrow g(x) = x^2 - 1$$

۱۷) اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت روبه‌رو باشد، تابع $y = -3f(-x+1)$ در کدام بازه اکیداً نزولی می‌باشد؟



(۱) $[-4, -3]$

(۲) $[-3, -2]$

(۳) $[-2, -1]$

(۴) $[1, 2]$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

می‌دانیم اگر تابع $y = f(x)$ اکیداً نزولی باشد، تابع $y = -f(x)$ اکیداً صعودی و تابع $y = -f(-x)$ اکیداً نزولی است.

با توجه به این نکته که انتقال‌ها و انبساط‌ها (انقباض‌ها) تغییری در یکنوایی توابع ایجاد نمی‌کنند، برای پیدا کردن بازه مورد نظر در سؤال، کافی است، بازه متناظر با بازه $[2, 3]$ را در تابع $y = -3f(1-x)$ پیدا کنیم. داریم:

$$2 \leq 1-x \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x-1 \leq -2$$

$$\Rightarrow -2 \leq x \leq -1$$

۱۸) اگر تابع $y = -3f(\frac{1}{p}x+1) - 6$ اکیداً نزولی باشد، تابع $y = f(-x)$ از لحاظ یکنوایی چگونه است؟

(۲) اکیداً نزولی

(۱) اکیداً صعودی

(۴) غیریکنوا

(۳) ممکن است اکیداً نزولی یا کیداً نزولی باشد.

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

در تابع $y = -3f(\frac{1}{p}x+1) - 6$ ضرایب ۱ و $\frac{1}{p}$ و -6 در یکنوایی تابع تأثیری ندارند، اما ضریب -3 نمودار تابع را نسبت به محور x ها قرینه کرده است. بنابراین چنانچه تابع $y = -3f(\frac{1}{p}x+1) - 6$ اکیداً نزولی باشد، تابع $y = f(x)$ حتماً اکیداً صعودی بوده است. همچنین اگر تابع $y = f(x)$ اکیداً صعودی باشد، تابع $y = f(-x)$ که قرینه تابع $y = f(x)$ نسبت به محور y ها می‌باشد، اکیداً نزولی خواهد بود.

۱۹) نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3$ با دو انتقال بر نمودار تابع $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ منطبق می‌شود. در این انتقال، نقطه به طول ۲ واقع بر نمودار f به نقطه‌ای با کدام عرض بر نمودار تابع g قرار می‌گیرد؟

۲۶ (۴)

-۱ (۳)

۶۳ (۲)

۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

ضابطه‌ی تابع g را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1 = (x+1)^3 - 1$$

بنابراین اگر نمودار تابع $f(x) = x^3$ را یک واحد به چپ و سپس یک واحد به پایین انتقال دهیم، نمودار تابع $g(x) = f(x+1) - 1$ حاصل می‌شود.

بنابراین از طول هر نقطه یک واحد کم شده و از عرض هر نقطه نیز یک واحد کم می‌شود، پس خواهیم داشت:

$$f(2) = 2^3 = 8$$

$$A(2, 8) \xrightarrow{g(x)=f(x+1)-1} A'(2-1, 8-1) = (1, 7)$$

پس نقطه‌ی $(2, 8)$ روی نمودار تابع f به نقطه‌ی $(1, 7)$ روی نمودار تابع g تبدیل می‌شود.

۲۰) تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & x \geq 0 \\ (x-1)^3 + 4, & x < 0 \end{cases}$ مفروض است. به ازای چند مقدار صحیح k ، معادله‌ی $f(x) = k$ دارای دو جواب است؟

۲ (۴)

۵ (۳)

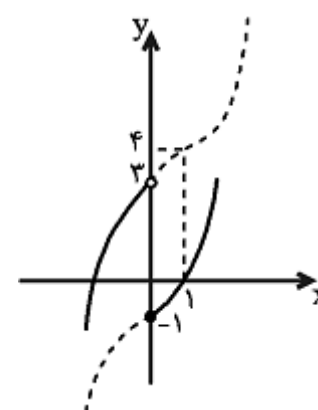
۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. برای رسم ضابطه‌ی بالایی، کافی است نمودار تابع $y = x^3$ را یک واحد به پایین انتقال دهیم. برای رسم ضابطه‌ی پایینی، کافی است نمودار تابع $y = x^3$ را یک واحد به راست و سپس ۴ واحد به بالا انتقال دهیم.



با توجه به نمودار، خط $y = k$ اگر k در محدوده‌ی $-1 \leq k < 3$ باشد، دو نقطه‌ی تلاقی با نمودار f خواهد داشت و در نتیجه معادله‌ی $f(x) = k$ دو جواب خواهد داشت.

پس به ازای مقادیر $k = -1, 0, 1, 2$ ، معادله دو جواب دارد.

(۲۱) حدود a برای آن که تابع $y = (a - 4)x^2 - x$ در بازه‌ی $[2, +\infty)$ صعودی باشد، کدام است؟

- (۱) $a \geq 4$ (۲) $a \geq \frac{17}{4}$ (۳) $\frac{1}{2} < a < \frac{17}{4}$ (۴) $\frac{1}{3} < a < 4$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

در تابع درجه‌ی دوم $y = ax^2 + bx + c$ ، اگر $a > 0$ باشد، تابع در بازه‌ی $[\frac{-b}{2a}, +\infty)$ صعودی و اگر $a < 0$ باشد، در بازه‌ی $(-\infty, \frac{-b}{2a}]$ صعودی است. بنابراین برای اینکه تابع $y = (a - 4)x^2 - x$ در بازه‌ی $[2, +\infty)$ صعودی باشد، باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} (1) & x^2 \text{ ضریب} > 0 \Rightarrow a - 4 > 0 \Rightarrow a > 4 \\ (2) & \frac{-b}{2a} \leq 2 \Rightarrow \frac{-(-1)}{2(a-4)} \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(a - 4) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow a - 4 \geq \frac{1}{4} \Rightarrow a \geq \frac{17}{4} \quad (II)$$

از اشتراک (I) و (II) داریم: $a \geq \frac{17}{4}$.

(۲۲) اگر تابع $f(x)$ تابع همانی باشد، به ازای کدام ضابطه برای $g(x)$ ، تابع $(\frac{f}{g})(x)$ در دامنه‌اش اکیداً یکنواست؟

- (۱) $x - |x|$ (۲) $\frac{1}{x}$ (۳) $|x|$ (۴) $\sqrt{x}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

ضابطه‌ی تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است. با توجه به هر گزینه، ضابطه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(1) \text{ گزینه‌ی } (\frac{f}{g})(x) = \frac{x}{x-|x|} = \begin{cases} \frac{x}{x-x} = \frac{x}{0}, & x \geq 0 \\ \frac{x}{x-(-x)} = \frac{x}{2x}, & x < 0 \end{cases}$$

تابع ثابت، اکیداً یکنوا نیست. $\Rightarrow (\frac{f}{g})(x) = \frac{1}{2}, x < 0 \rightarrow$

$$(2) \text{ گزینه‌ی } (\frac{f}{g})(x) = \frac{x}{\frac{1}{x}} = x^2, x \neq 0 \rightarrow \text{یکنوا نیست.}$$

$$(3) \text{ گزینه‌ی } (\frac{f}{g})(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \frac{x}{x}, & x > 0 \\ \frac{x}{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\frac{f}{g})(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \rightarrow \text{تابع، اکیداً یکنوا نیست.}$$

$$(4) \text{ اکیداً صعودی است. } (\frac{f}{g})(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}, x > 0.$$